

Министерство образования и науки Российской Федерации

Ивановский государственный университет

Факультет математики и компьютерных наук

ПРОГРАММА

ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА В МАГИСТРАТУРУ

ПО НАПРАВЛЕНИЯМ ПОДГОТОВКИ

01.04.01 МАТЕМАТИКА

(образовательная программа

«Фундаментальная математика») и

02.04.01 МАТЕМАТИКА И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

(образовательная программа

«Математические методы в компьютерных науках»)

Иваново, 2016

СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ

Блок 1. Алгебра, математическая логика и аналитическая геометрия

Фундаментальная алгебра.

Понятие системы линейных уравнений и ее решения. Понятия треугольной, трапециевидной и ступенчатой системы линейных уравнений. Метод нахождения всех решений для треугольных, трапециевидных и ступенчатых систем линейных уравнений, основные и свободные неизвестные. Элементарные преобразование систем линейных уравнений. Понятие равносильных систем линейных уравнений. Теорема о равносильности двух систем линейных уравнений, одна из которых получена из другой с помощью элементарных преобразований. Теорема о приведении совместной системы линейных уравнений с помощью элементарных преобразований к ступенчатому виду. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса. Однородные системы линейных уравнений. Приведение матриц к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк.

Отображения множеств. Умножение отображений. Понятие биективного отображения. Равносильность свойств биективности и обратимости для отображений. Понятие подстановки, ее стандартная запись. Число всех подстановок данной степени. Умножение подстановок, обратная подстановка. Разложение подстановки в произведение циклов и транспозиций. Четность подстановке. Поведение четности подстановок при их умножении.

Понятие определителя, определители второго и третьего порядков. Поведение определителя при перестановках строк и транспонировании. Понятие минора и алгебраического дополнения. Теорема о разложении определителя по строке. Фальшивое разложение определителя по строке. Свойства определителей, выводимые из теоремы о разложении определителя по строке. Поведение определителя при элементарных преобразованиях строк, подходы к вычислению определителей. Формулы Крамера для решения систем линейных уравнений.

Координатное пространство и понятие линейно зависимой системы векторов. Исследование линейной зависимости системы векторов с помощью системы линейных уравнений. Линейная выражаемость вектора через систему векторов и ее исследование с помощью системы линейных уравнений. Связь линейной зависимости и линейной выражаемости. Основная теорема о линейной зависимости. Понятие базиса системы векторов. Совпадение количества векторов в любых двух базисах данной системы векторов. Ранг системы векторов. Строчечный, столбцовый и минорный ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы. Вычисление ранга матрицы, нахождение базиса системы ее столбцов и строк, нахождение базисного минора. Теорема Кронекера – Капелли о системах линейных уравнений.

Операции над матрицами, их свойства, теорема об определителе произведения двух матриц. Критерий обратимости матрицы. Различные подходы к

вычислению обратной матрицы. Матричная интерпретация системы линейных уравнений.

Алгебраические системы с одной бинарной операцией. Определение и примеры группы. Определение и примеры кольца и поля. Операции над комплексными числами в алгебраической форме. Поле комплексных чисел. Определение и простые свойства модуля комплексного числа и комплексного сопряжения. Решение квадратных уравнений в комплексных числах. Геометрическое изображение комплексного числа и его тригонометрическая форма. Операции над комплексными числами в тригонометрической форме. Формула Муавра. Извлечение корней из комплексных чисел в тригонометрической форме. Корни из 1.

Операции над многочленами. Кольцо многочленов. Деление с остатком в кольце многочленов над полем. Схема Горнера. Понятие корня многочлена, теорема Безу. Нахождение кратности корня с помощью схемы Горнера. Делимость и ассоциированность в кольце многочленов над полем. Наибольший общий делитель двух многочленов и теорема о его линейном выражении. Алгоритм Евклида. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел. Разложение многочлена на множители над полем действительных чисел. Нахождение рациональных корней многочлена.

Определение, примеры и простейшие свойства групп, подгруппы. Циклические группы и порядок элемента группы. Разложения группы по подгруппе (левые и правые классы смежности). Теорема Лагранжа и ее следствия. Нормальные подгруппы. Понятие фактор-группы. Гомоморфизмы групп. Образ и ядро гомоморфизма. Первая и вторая теоремы о гомоморфизмах групп. Подгруппы в фактор-группе. Теорема о соответствии. Две теоремы об изоморфизме групп.

Обобщенная теорема Кэли о вложении групп. Прямые произведения групп. Теорема о строении конечной абелевой группы.

Идеалы колец. Простые кольца. Простота матричного кольца над полем. Характеризация коммутативных простых колец. Гомоморфизмы колец. Фактор-кольца. Теоремы о гомоморфизмах и изоморфизмах колец. Максимальные идеалы. Поле частных целостного кольца.

Линейные пространства и линейные подпространства. Линейные отображения. Линейные оболочки. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Конечномерные линейные пространства. Базисы, их существование и равносильность. Размерность линейного пространства. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений. Координаты вектора относительно базиса и их изменение при замене базиса. Базисы в подпространствах линейных пространств. Сумма и пересечение подпространств. Базисы в сумме и пересечении. Размерность суммы подпространств. Прямая сумма подпространств.

Линейные отображения и их матрицы. Изменение матрицы линейного отображения при замене базисов. Образ и ядро, ранг и дефект линейного

отображения; связь ранга и дефекта. Линейные операторы в одном пространстве. Инвариантные подпространства линейного оператора. Матрица линейного оператора, допускающего инвариантное подпространство. Собственные векторы и собственные значения для линейного оператора. Спектр оператора. Собственные подпространства и их свойства. Характеристический многочлен линейного оператора, характеристические корни. Алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения; неравенство для кратностей. Диагонализируемые линейные операторы. Условия диагонализируемости.

Билинейные функции и их матрицы. Изменения матрицы билинейной функции при замене базиса. Симметрические билинейные функции над полем действительных чисел. Закон инерции. Критерий Сильвестра. Евклидовы пространства, неравенство Коши, Элементарная геометрия евклидовых пространств. Метод ортогонализации Грама – Шмидта. Квадратичные формы и их матрицы, Метод Лагранжа диагонализации симметрической билинейной квадратичной формы.

Математическая логика и теория алгоритмов.

Основные логические операции. Определение формулы логики высказываний.

Определение предиката и примеры предикатов. Определение операции навешивания кванторов на предикаты. Определение формулы логики предикатов.

Понятие алгоритмически вычислимой функции, примеры. Тезис Черча-Тьюринга. Проблема остановки как одна из первых алгоритмически неразрешимых проблем.

Аналитическая геометрия.

Векторная алгебра. Скалярное, векторное и смешанное произведение, их геометрические приложения.

Прямая на плоскости. Различные виды уравнений прямой.

Плоскость и прямая в пространстве. Нормированное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости. Взаимное расположение двух плоскостей. Прямая в пространстве. Канонические уравнения прямой. Взаимное расположение прямой и плоскости.

Кривые 2-го порядка. Эллипс, гипербола и параболола (определение, уравнение, основные свойства). Классификация кривых 2-го порядка.

Блок 2. Математический анализ, дифференциальные уравнения, дифференциальная геометрия, численные методы и ВМО

Математический анализ.

Поле действительных чисел, его непрерывность.

Понятие числовой последовательности. Монотонные, ограниченные последовательности. Предел последовательности, понятие сходящейся и расходящейся последовательности. Подпоследовательность и частичный предел. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности. Теорема о существовании конечного предела у монотонной ограниченной последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса о существовании сходящейся подпоследовательности у ограниченной последовательности.

Числовой ряд, общий член ряда, частичная сумма ряда. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Равносильность свойства фундаментальности последовательности и ее сходимости (критерий Коши). Равносильность свойства фундаментальности последовательности частичных сумм числового ряда и его сходимости.

Понятие функции одной действительной переменной. Аргумент и значение функции. Область определения и множество значений функции. Предельная точка области определения. Понятие предела функции в точке и на бесконечности. Приращение аргумента и функции. Понятие производной функции в точке. Виды неопределенностей. Правила Лопиталья для раскрытия неопределенностей (теоремы).

Определение функции, непрерывной в точке и на множестве. Непрерывность суммы, произведения и частного непрерывных функций (теоремы). Теорема Больцано-Коши о промежуточных значениях непрерывной функции. Теорема Кантора о вложенных отрезках (применяется при доказательстве).

Свойства функций, непрерывных на отрезке: ограниченность, существование наибольшего и наименьшего значения, теорема о промежуточных значениях.

Приращение аргумента и функции. Определение производной функции в точке. Дифференцируемость функции в точке и на множестве. Непрерывность дифференцируемой функции. Критерий дифференцируемости функции одной переменной. Понятие функции нескольких переменных. Частные приращения функции нескольких переменных. Частные производные функции нескольких переменных. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Непрерывность дифференцируемой функции, существование частных производных. Достаточные условия дифференцируемости.

Непрерывные и дифференцируемые функции одной переменной. Теоремы Лагранжа и Коши. Понятие монотонной функции, виды монотонных функций. Условия постоянства и монотонности дифференцируемой функции.

Точка экстремума и экстремум функции одной переменной. Виды экстремумов. Необходимые и достаточные условия существования экстремумов функции одной переменной.

Производная функции одной переменной и производные высших порядков. Многократно дифференцируемые функции. Формула Тейлора для функции одного

переменного. Многочлен Тейлора для заданной функции, остаточный член, его формы. Единственность представления функции по формуле Тейлора. Достаточные условия возможности представления функции по формуле Тейлора.

Разбиение отрезка, его диаметр. Интегральные суммы. Понятие определенного интеграла и интегрируемой функции. Суммы и интегралы Дарбу, их свойства. Критерий интегрируемости функции на отрезке. Классы интегрируемых функций.

Понятие первообразной функции. Свойства первообразных. Общий вид первообразной. Существование первообразной у интегрируемой на отрезке функции. Интеграл с переменным верхним пределом, его свойства. Формула Ньютона-Лейбница.

Понятие числового ряда, общий член, частичная сумма ряда. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Необходимое условие сходимости ряда. Знакопеременные ряды. Простейшие признаки сходимости числовых рядов (признаки сравнения, Коши, Даламбера и Лейбница).

Понятие функциональной последовательности и ряда. Поточечная сходимость функциональной последовательности, предельная функция. Поточечная сходимость функционального ряда, его сумма. Понятие равномерной сходимости функциональной последовательности и ряда на множестве. Критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов. Теорема о непрерывности суммы функционального ряда.

Дифференциальные уравнения.

Основные понятия, связанные с дифференциальными уравнениями. Дифференциальные уравнения первого порядка. Методы интегрирования. Теорема существования и единственности решения уравнения $y' = f(x, y)$.

Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка. Область существования решений. Общие свойства решений. Линейная зависимость функций. Определитель Вронского. Общее решение однородного и неоднородного уравнений. Метод вариации постоянных. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами (однородные и неоднородные с любой правой частью и с правой частью - квазимногочленом).

Численные методы.

Точное и приближенное число. Истинная и предельная абсолютная погрешности приближенного числа. Точное и приближенное решение уравнения. Метод простой итерации для решения нелинейных уравнений и их систем: описание метода, сходимость, оценка погрешности, геометрическая интерпретация для уравнения с одной неизвестной.

Аппроксимация и интерполяция функций. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Оценка погрешности интерполяционной формулы Лагранжа.

Постановка задачи численного интегрирования; простая и составная формулы трапеций, оценка погрешности квадратурной формулы трапеций.

Вариационное исчисление и методы оптимизации.

Общая экстремальная задача: постановка, основные определения. Примеры экстремальных задач. Классы экстремальных задач. Теоремы существования решений экстремальных задач. Гладкие конечномерные экстремальные задачи без ограничений. Необходимые и достаточные условия локального экстремума.

Задача математического программирования с ограничениями в виде равенств, правило множителей Лагранжа. Стационарные точки. Метод неопределенных множителей Лагранжа.

Простейшая задача классического вариационного исчисления (постановка задачи, определения слабого, сильного локальных и абсолютного экстремумов, связь между ними, уравнение Эйлера-Лагранжа, первые интегралы уравнения Эйлера-Лагранжа). Задача о брахистохроне. Задача о гармоническом осцилляторе. Прямые методы вариационного исчисления. Метод Рунге.

Дифференциальная геометрия и топология.

Пространственные кривые, способы их задания. Длина дуги пространственной кривой. Натуральная параметризация. Трехгранник Френе. Вычисление касательного вектора и главной нормали кривой в точке. Касание кривой с поверхностью. Плоскость, имеющая с кривой в данной точке плотнейшее касание. Формулы Френе. Кручение кривой. Кривые, у которых кручение в каждой точке равно 0. Формулы для вычисления кривизны и кручения кривой в точке. Винтовые линии, как кривые, у которых кривизна и кручение в каждой точке постоянны.

Способы задания поверхности. Координатные линии на поверхности. Примеры. Цилиндрические поверхности, конусы, поверхности вращения, геликоиды: способы задания. Кривые на поверхности. Касательный вектор к кривой на поверхности. Первая квадратичная форма поверхности. Направления на поверхности. Нормальные сечения. Нормальные кривизны поверхности в точке. Вторая квадратичная форма поверхности в точке. Главные направления и главные кривизны, их вычисление.

Понятие метрического пространства. Примеры. Сферы, шары, окрестности в метрическом пространстве. Понятие топологического пространства. Примеры. Открытые и замкнутые множества.

Процедура и порядок проведения вступительного экзамена.

Экзамен является устным и предполагает развернутый ответ студента у доски перед всем составом комиссии. Студент получает экзаменационный билет, относящийся к одному из выбранных им блоков. Экзаменационный билет содержит два теоретических вопроса и одну задачу. Ответ на каждый вопрос билета представляет собой монолог студента, в котором он демонстрирует свои знания в соответствующей области, а также способность к строгому и аккуратному воспроизведению материала (определений, формулировок теорем и их доказательств, подходов и методов решения математических задач). Ответы на теоретические вопросы и решение практической задачи сопровождается необходимыми записями на доске. После ответа на каждый из вопросов, входящих в билет (а также по ходу ответов) экзаменаторы могут высказывать свои замечания и задавать дополнительные вопросы. Решение задачи демонстрируется студентом в устной форме и сопровождается записями на доске всех необходимых формул и вычислений.

Время на подготовку к ответу на теоретические вопросы и на решение задачи отводится в пределах от одного до двух академических часов. Во время подготовки студентам запрещено использовать какие-либо печатные или рукописные материалы, а также технические средства.

Критерии и шкала оценки:

Итоговая оценка сдачи вступительного экзамена выставляется членами предметной комиссии исходя из определения степени полного соответствия, соответствия в основном, частичного соответствия и несоответствия требованиям, изложенным в ФГОС ВПО по направлению подготовки Математика и Математика с компьютерными науками и требованиями вуза по профильной направленности.

Критериями являются знания, умения и навыки, установленные в соответствии с программой государственного экзамена. При этом итоговая оценка формируется на основе следующих критериев:

1) содержательная сторона ответа на теоретические вопросы билета; уровень знания сути вопросов, степень полноты их раскрытия; логичность построения, четкость и аргументированность ответа; манера изложения материала (свободное изложение, акцентирование внимания на ключевых аспектах, чтение по бумажке и т.д.) – 35 % итоговой оценки;

2) правильность решения практической задачи; знание применяемых формул и методик для решения задач; умение использовать знания по теории в практической деятельности; сделанные по задаче выводы и, при необходимости, разъяснение алгоритма решения – 25 % итоговой оценки;

3) ответы на дополнительные вопросы по билету и прочитанным курсам, формирующим программу государственного аттестационного экзамена; способность ориентироваться в типовых и нестандартных ситуациях; умение тактично, грамотно и аргументировано отстаивать собственную позицию;

произведенное впечатление на членов ГЭК об общем уровне профессиональной подготовки – 30 % итоговой оценки;

4) средний балл по диплому за весь период обучения в вузе; участие в научных конференциях и чтениях; участие в научно-исследовательской и хозяйственной работе – 10% итоговой оценки.

Общий уровень подготовленности бакалавра к государственному экзамену членами предметной комиссии с учетом вышеназванных критериев оценивается по стобалльной системе:

Критерии	Баллы
Содержательная сторона ответа на теоретические вопросы билета; уровень знания сути вопросов, степень полноты их раскрытия; логичность построения, четкость и аргументированность ответа; манера изложения материала (свободное изложение, акцентирование внимания на ключевых аспектах, чтение по бумажке и т.д.)	[0;35]
Правильность решения практической задачи; знание применяемых формул и методик для решения задач; умение использовать знания по теории в практической деятельности; сделанные по задаче выводы и, при необходимости, разъяснение алгоритма решения	[0;25]
Ответы на дополнительные вопросы по билету и прочитанным курсам, формирующим программу государственного аттестационного экзамена; способность ориентироваться в типовых и нестандартных ситуациях; умение тактично, грамотно и аргументировано отстаивать собственную позицию; произведенное впечатление на членов ГЭК об общем уровне профессиональной подготовки	[0;30]
Средний балл по диплому за весь период обучения в вузе; участие в научных конференциях и чтениях; участие в научно-исследовательской и хозяйственной работе – 10% итоговой оценки.	[0;10]
Итого	[0;100]

Учебно-методическое и информационное обеспечение подготовки и проведения вступительного экзамена «Математика»

а) основная учебная и учебно-методическая литература:

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 1: Основы алгебры - М.: МЦНМО, 2009.

<http://www.biblioclub.ru/book/63140/>

2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 3: Основные структуры алгебры - М.: МЦНМО, 2009. <http://www.biblioclub.ru/book/62951/>

3. Сборник задач по алгебре. В 2-х тт. Т. 1. Ч. I. Основы алгебры. Ч. II. Линейная алгебра и геометрия - М.: Физматлит, 2007. <http://www.biblioclub.ru/book/82941/>.

4. Курош А. Г. Теория групп [Электронный ресурс]/ Курош А.Г.— Электрон. текстовые данные.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011.— 805 с. <http://www.iprbookshop.ru/12902.html>

5. Ершов Ю.Л. Математическая логика [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Ершов Ю.Л., Палютин Е.А.— Электрон. текстовые данные.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011.— 356 с. <http://www.iprbookshop.ru/12884.html>.

6. Ильин, В. А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник / В. А. Ильин, Г. Д. Ким .— 3-е изд, перераб. и доп .— М. : Проспект, 2012 .— 392 с.

7. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Учебник [Электронный ресурс] / Д. В. Беклемишев. - М.: Физматлит, 2009. - 309 с. - Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83040>

8. Мищенко А. С. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии - М.: Физматлит, 2004. <http://www.biblioclub.ru/book/69322/>.

9. Федорчук В. В. Общая топология. Основные конструкции - М.: Физматлит, 2006. <http://www.biblioclub.ru/book/69332/>.

10. Ильин В.А. Основы математического анализа. В 2-х частях. Часть I. Учебник для вузов 7-е изд., стер. - М.: Физматлит, 2009. <http://www.biblioclub.ru/book/76686/>.

11. Ильин В.А. Основы математического анализа. В 2-х частях. Часть II. Учебник для вузов 5-е изд. - М.: Физматлит, 2009. <http://www.biblioclub.ru/book/83225/>.

12. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды. Учебник 3-е изд., перераб. (2-е изд. — 1998 г.) - М.: Физматлит, 2008.

13. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : в 2 т.: учебное пособие для вузов / Н. С. Пискунов - : Интеграл- Пресс, 2003 Т. 1: Т. 1 - 416 с.

14. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович .— М. : АСТ : Астрель, 2010 .— 558 с.

15. 2. Тихонов А. Н. Дифференциальные уравнения Изд. 4. - М.: Физматлит, 2002. <http://www.biblioclub.ru/book/76634/>.

16. Петровский, И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Г. Петровский .— М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009 .— 207 с .— (Классика и современность. Математика) .— 08-01-07069.

17. Бахвалов Н.С. Численные методы [Электронный ресурс]/ Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.— Электрон. текстовые данные.— М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012.— 635 с. <http://www.iprbookshop.ru/6502.html>.

б) дополнительная литература:

1. Яцкин, Н. И. Линейная алгебра : теоремы и алгоритмы : учебное пособие / Н. И. Яцкин ; Иван. гос. ун-т .— Иваново : ИвГУ, 2008 .— 606 с

2. Яцкин Н. И. Жордановы (и частично жордановы) базисы для линейных операторов над полем рациональных чисел : учебное пособие для студентов вузов / Н. И. Яцкин ; Иван. гос. ун-т .— Иваново : ИвГУ, 2010 .— 178 с .

3. Лихтарников Л. М. Математическая логика : курс лекций : задачник-практикум и решения : учебное пособие / Л. М. Лихтарников, Т. Г. Сукачева .— Изд. 4-е, стер .— СПб. [и др.] : Лань, 2009 .— 276 с .— (Учебники для вузов. Специальная литература).

4. Беклемишев Д.В. Решение задач из курса аналитической геометрии и линейной алгебры [Электронный ресурс]/ Беклемишев Д.В.— Электрон. текстовые данные.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014.— 192 с. <http://www.iprbookshop.ru/24519.html>.

5. Линейная алгебра и геометрия : методические указания и задачи для студентов 1 курса математического факультета / Иван. гос. ун-т ; сост. Е. А. Иванова .— Иваново : ИвГУ, 2011 .— 44 с.

6. Розендорн Э. Р. Задачи по дифференциальной геометрии - М.: Физматлит , 2008. <http://www.biblioclub.ru/book/68376/>.

7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа Изд. 7-ое. (6-е изд. — 1989 г.) - М.: Физматлит, 2009. <http://www.biblioclub.ru/book/82563/>.

8. Кудрявцев Л. Д. Сборник задач по математическому анализу. В 3 т. Т. 2. Интегралы. Ряды 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Физматлит, 2009. <http://www.biblioclub.ru/book/82820/>.

9. Карасев И. П. Теория функций комплексного переменного М.: Физматлит, 2008. - 213 с. <http://www.biblioclub.ru/book/68139/>.

Интернет-ресурсы:

1. <http://window.edu.ru/window/> (единое окно доступа к образовательным ресурсам)

2. <http://10.1.1.39/> (доступ из локальной сети университета к электронной библиотеке математического факультета)

3. <http://www.mathnet.ru/> (Общероссийский математический портал)

4. <http://eqworld.ipmnet.ru/> (Мир математических уравнений)